Мы видим, что предельные значения $P_\sigma(\omega_3)$ при $\omega \to x$ совпадают с $P_\sigma(x_3)$ только для $x_3 > -1$. Для того чтобы получить $P_\sigma(x_3)$, следует взять полусумму предельных значений из *обоих* многообразий Ω^+ и Ω^-.

Аналогично мы рассуждаем для $P_\sigma(-x_3)$.

Таким образом, предельные значения на $\mathcal{X}$ функции $\Psi_{\sigma,\varepsilon}(\omega)$ на $\Omega^\pm$, определённой с помощью (2.2), совпадают с предельными значениями функций $\Psi_{\sigma,\varepsilon}(x)$ только для $-1 < x_3 < 1$. Сферические функции $\Psi_{\sigma,\varepsilon}(x)$ *четны* по x_1, но предельная функция $\lim\,\Psi_{\sigma,\varepsilon}(\omega)$ *таковой не является*. Чтобы получить сферическую функцию $\Psi_\sigma(x)$ из функции $\Psi_{\sigma,\varepsilon}(\omega)$, нужно использовать *оба* многообразия $\Omega^\pm$ и взять полусумму предельных значений из Ω^+ и Ω^-:

$$\Psi_{\sigma,\varepsilon}(x) = \frac{1}{2}\sum_{\pm} \lim\,\Psi_{\sigma,\varepsilon}(\omega),$$

где предел берётся при $\omega \to x$, $\omega \in \Omega^\pm$, $x \in \mathcal{X}$.

Литература

1. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. М.: Наука, 1965.

2. В. Ф. Молчанов. Квантование на мнимой плоскости Лобачевского. Функц. анализ и его прил., 1980, том 14, вып. 2. 73–74.

3. V. F. Molchanov. Holomorphic discrete series for hyperboloids of Hermitian type. J. Funct. Anal., 1997, vol. 147, No. 1, 26–50

4. V. F. Molchanov. Canonical and boundary representations on a hyperboloid of one sheet. Acta Appl. Math., 2004, vol. 81, Nos. 1–3, 191–204.

УДК 517.98

Дифференциальная формула для преобразования Пуассона [8]

© В. Ф. Молчанов, Н. Б. Волотова

Ключевые слова: симплектические многообразия, пара-эрмитовы пространства, представления, сплетающие операторы.

Дается разложение тензорного произведения конечномерного представления группы $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ из максимально вырожденной серии и контраградиентного представления.

[8]Работа поддержана грантами: РФФИ 07-01-91209 ЯФ_а, 06-06-96318 р_центр_а, Научной Программой "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы" РНП.2.1.1.351 и Темпланом 1.5.07.

Рассматривается соответствующий анализ на пространстве $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{GL}(n-1,\mathbb{R})$. Для преобразования Пуассона найдена дифференциальная формула.

We give a decomposition of the tensor product of a finite dimensional representation of the group $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ in a maximal degenerate series and the contragredient representation and study a related analysis on the space $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{GL}(n-1,\mathbb{R})$. For the Poisson transform, a differential formula is presented.

Пусть G/H – симплектическое симметрическое пространство. Конечномерный гармонический анализ на G/H состоит в изучении представления U сдвигами в пространстве многочленов на G/H (многообразие G/H вкладывается как G-орбита в алгебру Ли $\mathfrak{g}$ группы G, многочлен на G/H – это ограничение на G/H многочлена на $\mathfrak{g}$). Настоящая работа посвящена одной теме из конечномерного гармонического анализа на пара-эрмитовых симметрических пространствах ранга один. Все такие пространства с точностью до накрытия исчерпываются пространствами G/H, где G есть группа $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, H – ее подгруппа $\mathrm{GL}(n-1,\mathbb{R})$. Преобразование Пуассона $\mathcal{P}_m$ – это сплетающий оператор, вкладывающий конечномерное неприводимое представление T_m в квазирегулярное представление U. Представление T_m появляется при разложении тензорного произведения сферического конечномерного неприводимого представления группы $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ и контраградиентного представления. Основной результат работы состоит в предъявлении для преобразования Пуассона *дифференциальной* формулы. Ключевой шаг здесь состоит в вычислении H-инварианта в пространстве обобщенных функций на подгруппе Z группы G (эта подгруппа есть группа Гейзенберга размерности $2n-3$), сосредоточенных в единице. Вообще преобразование Пуассона определяется как интегральное преобразование. Поэтому появление его в дифференциальной форме заслуживает внимания. Такая формула была замечена для $n=2$ в [7], краткое сообщение для произвольного n было сделано в [1].

Приведем некоторые обозначения, используемые дальше.

$\mathbb{N}=\{0,\,1,\,2,\,\ldots\}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ – множества целых, вещественных, комплексных чисел, соответственно, $\mathbb{R}^*$ – мультипликативная группа вещественных чисел ($\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$).

Знак сравнения $\equiv$ обозначает сравнение по модулю 2.

Мы используем следующее обозначение для характера (гомоморфизма в мультипликативную группу комплексных чисел) группы $\mathbb{R}^*$:

$$t^{\mu,\varepsilon}=|t|^{\mu}\,\mathrm{sgn}^{\varepsilon}\,t,$$

где $t\in\mathbb{R}^*$, $\mu\in\mathbb{C}$, $\varepsilon=0,1$.

Через $\mathrm{Mat}\,(m,F)$ обозначается пространство матриц m-го порядка над полем F.

Для многообразия M через $\mathcal{D}(M)$ обозначается пространство комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций на M с компактным носителем, снабженное обычной топологией. Через $\mathcal{D}'(M)$ обозначается пространство обобщенных функций на M – линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}(M)$.

Для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ мы обозначаем через $\mathrm{Env}(\mathfrak{g})$ ее универсальную обертывающую алгебру.

Дифференцируемое представление T группы Ли G порождает представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (дифференциал представления T) и, следовательно, представление алгебры $\mathrm{Env}(\mathfrak{g})$. Для этих порожденных представлений мы сохраняем тот же самый символ (в данном случае T), который обозначает представление группы.

Пусть билинейная форма на $\mathcal{D}(M)$

$$(F, f) = \int_M F(x) f(x)\, dx$$

(dx – некоторая мера на M) инвариантна относительно пары представлений (T, S) группы Ли G, действующих в $\mathcal{D}(M)$, т.е.

$$(T(g)F,\ f) = \big(F,\ S(g^{-1})f\big)\,. \tag{0.1}$$

Тогда мы можем распространить представление T на пространство $\mathcal{D}'(M)$ обобщенных функций на M – с помощью формулы (0.1), в которой (F, f) обозначает значение функционала F из $\mathcal{D}'(M)$ на основной функции f из $\mathcal{D}(M)$. Для полученного представления в обобщенных функциях мы сохраняем тот же символ (в данном случае T).

Аналогично, если оператор A в $\mathcal{D}(M)$ симметричен: $(AF,\ f) = (F,\ Af)$, то мы можем распространить его на $\mathcal{D}'(M)$ с помощью этой формулы.

§ 1. Группа $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, ее подгруппы и разложения

Пусть G есть группа $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ вещественных матриц порядка $n \geqslant 3$ с определителем 1. Будем считать, что G действует линейно на $\mathbb{R}^n$ справа. В соответствии с этим векторы из $\mathbb{R}^n$ будем записывать в виде строки. Пусть $e_1, .., e_n$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^n$, $\langle x, y\rangle$ – стандартное скалярное произведение.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G есть подпространство в $\mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{R})$, состоящее из матриц X со следом 0. Пусть E_{ij} обозначает матрицу, все элементы которой равны нулю, кроме одного, стоящего в i-ой строке и j-ом столбце, равного единице (матричная единица). Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ имеет размерность $n^2 - 1$, базис в ней образуют элементы $E_{ij},\ i \neq j$, и $X_{i,i+1} = E_{ii} - E_{i+1,i+1},\ i = 1, ..., n-1$.

Нам потребуются подгруппы и разложения, отвечающие следующим двум разбиениям числа n: $n = (n-1) + 1$ и $n = 1 + (n-2) + 1$.

(a) Рассмотрим разбиение: $n = (n-1)+1$. Запишем матрицы $g \in G$ в блочном виде соответственно этому разбиению:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

где $\alpha \in \mathrm{Mat}\,(\mathrm{n}-1, \mathbb{R})$, $\delta \in \mathbb{R}$, γ – строка из $\mathbb{R}^{n-1}$, β – столбец из $\mathbb{R}^{n-1}$. Пусть H – подгруппа блочно диагональных матриц:

$$h = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

P^+ и P^- – подгруппы верхних и нижних блочно треугольных матриц, соответственно:

$$p = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Обозначим

$$\widehat{g} = Ig'^{-1}I, \quad I = \begin{pmatrix} -E & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

штрих означает транспонирование. Запишем $\widehat{g}$ в виде (1.1):

$$\widehat{g} = \begin{pmatrix} \widehat{\alpha} & \widehat{\beta} \\ \widehat{\gamma} & \widehat{\delta} \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

(б) Теперь возьмем разбиение $n = 1 + (n-2) + 1$. Пусть B – подгруппа верхних блочно треугольных матриц:

$$b = \begin{pmatrix} p & * & * \\ 0 & q & * \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

Z – подгруппа нижних блочно унипотентных матриц:

$$z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & E & 0 \\ c & s & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

Здесь p, r, c – числа из $\mathbb{R}$ $(p, r \neq 0)$, $q \in \mathrm{GL}\,(n-2, \mathbb{R})$, s – строка $(s_2, ..., s_{n-1})$ из $\mathbb{R}^{n-2}$, t – столбец $(t_2, ..., t_{n-1})$ из $\mathbb{R}^{n-2}$. Матрица z^{-1}, обратная к z, получается из (1.5) заменой c, s, t соответственно на $\widehat{c} = st - c$, $-s$, $-t$.

Имеет место разложение Гаусса: $G = \overline{BZ}$, т. е. почти каждый элемент $g \in G$ можно однозначно записать в виде

$$g = bz, \quad b \in B,\ z \in Z. \tag{1.6}$$

Разложение Гаусса определено для тех $g \in G$, для которых $g_{nn} \neq 0$ и $(g^{-1})_{11} \neq 0$.

С помощью (1.6) определим функцию

$$\chi(g) = r/p = g_{nn} \cdot (g^{-1})_{11}. \tag{1.7}$$

Ее область определения есть $(g^{-1})_{11} \neq 0$.

Разложение Гаусса показывает, что подгруппа Z пересекает почти все классы смежности из пространства G/B правых классов смежности. Естественное действие группы G на G/B порождает действие

$$z \mapsto \widetilde{z} = z \cdot g \tag{1.8}$$

группы G на Z, а именно, $\widetilde{z}$ определяется из разложения Гаусса произведения zg:

$$zg = \widetilde{b}\widetilde{z}.$$

Для всякого $g \in G$ действие (1.8) определено на некотором плотном открытом множестве. Инвариантная мера на Z

$$dz = dc ds_2 ... ds_{n-1} dt_2 ... dt_{n-1}$$

при отображении (1.8) преобразуется так: $d\widetilde{z} = |\widetilde{r}/\widetilde{p}|^{1-n}\, dz$.

§ 2. Пространство G/H

Однородное пространство $\mathcal{X} = G/H$ является полупростым симметрическим пространством, его ранг равен 1, размерность равна $2n-2$. Его можно реализовать как G-орбиту в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ относительно присоединенного представления, так что оно – симплектическое пространство. Но нам удобнее использовать слегка измененную реализацию: она получается из указанной реализации параллельным сдвигом в $\mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{R})$.

Пусть x^0 есть следующая матрица $n \times n$, записанная в блочном виде относительно разбиения $n = (n-1)+1$:

$$x^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e_n' e_n. \tag{2.1}$$

Тогда $\mathcal{X}$ есть G-орбита в $\mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{R})$ точки x^0 относительно действия

$$x \mapsto g^{-1} x g. \tag{2.2}$$

Это многообразие $\mathcal{X}$ есть множество матриц из $\mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{R})$, ранг и след которых равны 1.

Введем на $\mathcal{X}$ "орисферические координаты" ξ, η, где $\xi = (\xi_1, ..., \xi_{n-1})$, $\eta = (\eta_1, ..., \eta_{n-1})$ – векторы-строки из $\mathbb{R}^{n-1}$:

$$x = \frac{1}{N(\xi, \eta)} \begin{pmatrix} -\eta'\xi & -\eta' \\ \xi & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$N(\xi, \eta) = 1 - \xi\eta'. \tag{2.3}$$

Эти координаты определены на $\mathcal{X}$, кроме множества $x_{nn} = 0$. Действие (2.2) в координатах ξ, η расщепляется: оно есть дробно-линейное по ξ и по η отдельно, именно, пусть $\widetilde{x} = g^{-1}xg$, тогда если x имеет координаты (ξ, η), то $\widetilde{x}$ имеет координаты $(\widetilde{\xi}, \widehat{\eta})$, где (см. (1.1) и (1.3))

$$\widetilde{\xi} = \xi \cdot g = (\xi\beta + \delta)^{-1}(\xi\alpha + \gamma),$$
$$\widehat{\eta} = \eta \cdot \widehat{g} = (\eta\widehat{\beta} + \widehat{\delta})^{-1}(\eta\widehat{\alpha} + \widehat{\gamma}).$$

Группа G действует на функциях f на $\mathcal{X}$ сдвигами (квазирегулярное представление):

$$(U(g)f)(x) = f(g^{-1}xg). \tag{2.4}$$

§ 3. Сферические представления

В этом параграфе мы приводим некоторый материал о конечномерных представлениях группы G, которые участвуют в разложении функций на сфере в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим разбиение $n = (n-1) + 1$ и соответствующие подгруппы и разложения для группы G, см. § 1, (a).

Представление π_k^-, $k \in \mathbb{N}$, индуцировано характером $p \mapsto c^k$ подгруппы P^+, см. (1.2). Оно действует сдвигами в пространстве $S_k(\mathbb{R}^n)$ однородных многочленов степени k:

$$\left(\pi_k^-(g)\psi\right)(x) = \psi(xg)$$

Ограничивая многочлены из $S_k(\mathbb{R}^n)$ на гиперплоскость $x_n = 1$, мы получим пространство V_k многочленов от $x_1, ..., x_{n-1}$ степени $\leqslant k$. Базис состоит из одночленов $x^u = x_1^{u_1} ... x_{n-1}^{u_{n-1}}$, $u_i \in \mathbb{N}$, $u_1 + ... + u_{n-1} \leqslant k$ (мы используем мультииндексные обозначения). В этом пространстве представление π_k^- действует по формуле:

$$\left(\pi_k^-(g)f\right)(\xi) = (\xi\beta + \delta)^k f(\xi \cdot g).$$

Наряду с этим представлением рассмотрим представление π_k^+, $k \in \mathbb{N}$, индуцированное характером $p \mapsto c^{-k}$ подгруппы P^-. Оно действует в пространстве V_k по формуле:

$$\left(\pi_k^+(g)f\right)(\eta) = \left(\pi_k^-(\widehat{g})f\right)(\eta) = \left(\eta\widehat{\beta} + \widehat{\delta}\right)^k f(\eta \cdot \widehat{g}).$$

Пусть $\mathfrak{a}$ – подалгебра в $\mathfrak{g}$, состоящая из диагональных матриц X с диагональю $\nu_1, ..., \nu_n$, $\nu_1 + ... + \nu_n = 0$. Веса конечномерных представлений алгебры $\mathfrak{g}$ – это линейные функции $\alpha(X)$ на $\mathfrak{a}$. Отождествим указанные диагональные матрицы X с векторами $X = (\nu_1, ..., \nu_n)$ из $\mathbb{R}^n$, а функции α – тоже с векторами из $\mathbb{R}^n$, так что

$$\alpha(X) = \langle \alpha, X \rangle = \sum_i \alpha_i \nu_i.$$

В силу соотношения $\nu_1 + ... + \nu_n = 0$ координаты вектора $\alpha \in \mathbb{R}^n$ определены с точностью до общего слагаемого. Мы не будем придерживаться какой-нибудь одной специальной нормировки и будем записывать веса в удобном для нас виде. Равенство весов мы будем обозначать " $\sim$ ". Упорядочим веса α лексикографически.

Положительная корневая подалгебра $\mathfrak{n}$ натянута на E_{ij}, $i < j$, а отрицательная $\mathfrak{z}$ – на E_{ij}, $i > j$.

Одночлен ξ^u является собственным для $X \in \mathfrak{a}$ в представлении π_k^- с весом

$$\alpha \sim \left(u_1, ..., u_{n-1},\ k - \sum u_i\right).$$

Старший вес и старший вектор – это $(k, 0, ..., 0)$ и ξ_1^k. Младший вес и младший вектор – это $(0, ..., 0, k)$ и 1. Одночлен η^u в представлении π_k^+ является собственным для $X \in \mathfrak{a}$ с весом

$$\alpha \sim \left(-u_1, ..., -u_{n-1},\ \sum u_i - k\right).$$

Старший вес есть $(k, ..., k, 0) \sim (0, ..., 0, -k)$, старший вектор есть 1. Младший вес и младший вектор – это $(-k, 0, ..., 0)$ и η_1^k.

Пусть $d(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ – размерность конечномерного неприводимого представления группы G со старшим весом $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Как известно, см., например, [3],

$$d(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \frac{\prod\limits_{i<j}(\lambda_i - i - \lambda_j + j)}{1!\ 2! \dots (n-1)!}. \tag{3.1}$$

Отсюда получаем,что размерность $d(k, 0,\ \dots, 0)$ представления π_k^- и размерность $d(0,\ \dots, 0, -k)$ представления π_k^+ равны друг другу:

$$d(k, 0,\ \dots, 0) = d(0,\ \dots, 0, -k) = \binom{k+n-1}{n-1}. \tag{3.2}$$

Кратности весов в представлениях $\pi_k^{\pm}$ равны 1.

На V_k существует единственная с точностью до множителя билинейная форма, инвариантная относительно пар (π_k^+, π_k^-) и (π_k^-, π_k^+). Обозначим через F_k такую форму, нормированную условием $F_k(1, 1) = 1$. В базисе x^u форма F_k диагональна, "скалярный квадрат" элемента базиса есть

$$F_k(x^u,\ x^u) = (-1)^{u_1+\dots+u_{n-1}}\ \frac{u_1!\dots u_{n-1}!\,(k - \sum u_i)!}{k!}.$$

§ 4. Представления, связанные с G/H

В этом параграфе мы описываем представления $T_{\sigma,\varepsilon}$, $\sigma \in \mathbb{C}$, $\varepsilon = 0, 1$, связанные с G/H. Мы опираемся на [5], [6]. Вспомним подгруппы и разложения группы G, связанные с разложением $n = 1 + (n-2) + 1$, см. § 1 (б).

Представление $T_{\sigma,\varepsilon}$ группы G индуцируется следующим характером $\nu_{\sigma,\varepsilon}$ группы B:

$$\nu_{\sigma,\varepsilon}(b) = \chi(b)^{\sigma,\varepsilon} = \left(\frac{r}{p}\right)^{\sigma,\varepsilon},$$

где матрица $b \in B$ дается (1.4). Оно действует правыми сдвигами:

$$(T_{\sigma,\varepsilon}(g)\,\psi)(s) = \psi(sg), \quad s \in G,$$

в пространстве $\mathcal{D}_{\sigma,\varepsilon}(G)$, которое состоит из функций $\psi \in C^\infty(G)$, удовлетворяющих условию:

$$\psi(bg) = \nu_{\sigma,\varepsilon}(b)\,\psi(g), \quad b \in B,\ g \in G.$$

Представление $T_{\sigma,\varepsilon}$ может быть реализовано в однородных функциях на некотором конусе в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathcal{Y}$ обозначает множество матриц из $\mathrm{Mat}\,(n,\mathbb{R})$ ранга 1 и со следом 0. Это множество лежит в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и представляет собой конус: вместе с каждой точкой y оно содержит всю образующую $\{ty\}$, $t \in \mathbb{R}^*$. Этот конус состоит из матриц $u'v$, где $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ с условием $\langle u,\, v\rangle = 0$. Его размерность равна $2n-2$. Он есть G-орбита относительно действия (2.2). Обозначим $y^0 = e_1' e_n$. Всякая точка $y \in \mathcal{Y}$ имеет вид:

$$y = y(g) = g^{-1} y^0 g.$$

Пусть $\mathcal{D}_{\sigma,\varepsilon}(\mathcal{Y})$ обозначает пространство функций $f \in C^\infty(\mathcal{Y})$, удовлетворяющих условию:

$$f(ty) = t^{\sigma,\varepsilon} f(y), \quad y \in \mathcal{Y}, \quad t \in \mathbb{R}^*.$$

Это пространство изоморфно $\mathcal{D}_{\sigma,\varepsilon}(G)$ с помощью соответствия $f(y) = \psi(g)$, $y = y(g)$. Представление $T_{\sigma,\varepsilon}$ действует в $\mathcal{D}_{\sigma,\varepsilon}(\mathcal{Y})$ сдвигами:

$$(T_{\sigma,\varepsilon}(g) f)(y) = f(g^{-1} y g).$$

Другую реализацию представления мы получим, используя сечение конуса $\mathcal{Y}$, являющееся орбитой $\mathcal{Y}(Z)$ точки y^0 относительно подгруппы Z. Она выделяется условием $y_{1n} = 1$. Эта орбита находится во взаимно-однозначном соответствии с самой подгруппой Z, поэтому нам в основном будет удобнее иметь дело с функциями не на этом сечении, а на самом многообразии Z, прибегая иногда к помощи конуса.

При ограничении функций из $\mathcal{D}_{\sigma,\varepsilon}(\mathcal{Y})$ на орбиту $\mathcal{Y}(Z)$ получаем пространство $\mathcal{D}_{\sigma,\varepsilon}(Z)$ функций из $C^\infty(Z)$ с некоторыми условиями на бесконечности. Представление $T_{\sigma,\varepsilon}$ в этой реализации действует так (см. (1.8) и (1.7)):

$$\left(T_{\sigma,\varepsilon}(g) f\right)(z) = \chi(zg)^{\sigma,\varepsilon} f(z \cdot g).$$

Элементам E_{ij}, $i \neq j$, алгебры Ли $\mathfrak{g}$ отвечают в представлении $T_{\sigma,\varepsilon}$ следующие операторы (напомним, что $\widehat{c} = st - c$). Пусть индексы k, r принимают значения из $\{2, ..., n-1\}$. Тогда

$$
\begin{aligned}
T_{\sigma,\varepsilon}(E_{1r}) &= c\,\frac{\partial}{\partial s_r} - t_r\,\sum_i t_i \frac{\partial}{\partial t_i} + \sigma\, t_r, && (4.1)\\
T_{\sigma,\varepsilon}(E_{1n}) &= -c^2\,\frac{\partial}{\partial c} - c\,\sum_i s_i \frac{\partial}{\partial s_i} + \widehat{c}\sum_i t_i \frac{\partial}{\partial t_i} + \sigma\,(c - \widehat{c}), && (4.2)\\
T_{\sigma,\varepsilon}(E_{kr}) &= s_k\,\frac{\partial}{\partial s_r} - t_r\,\frac{\partial}{\partial t_k}, \quad k \neq r, && (4.3)\\
T_{\sigma,\varepsilon}(E_{k1}) &= s_k\,\frac{\partial}{\partial c} + \frac{\partial}{\partial t_k}, && (4.4)\\
T_{\sigma,\varepsilon}(E_{kn}) &= -cs_k\,\frac{\partial}{\partial c} - s_k\,\sum_i s_i \frac{\partial}{\partial s_i} + \widehat{c}\frac{\partial}{\partial t_k} + \sigma\, s_k, && (4.5)\\
T_{\sigma,\varepsilon}(E_{n1}) &= \frac{\partial}{\partial c}, && (4.6)\\
T_{\sigma,\varepsilon}(E_{nr}) &= \frac{\partial}{\partial s_r}. && (4.7)
\end{aligned}
$$

Диагональной матрице $X = \mathrm{diag}\,\{\nu_1, ..., \nu_n\}$ из $\mathfrak{a}$ отвечает следующий оператор:

$$
T_{\sigma,\varepsilon}(X) = (\nu_1 - \nu_n)c\,\frac{\partial}{\partial c} + \sum_i (\nu_i - \nu_n) s_i\,\frac{\partial}{\partial s_i} +
$$

$$
+ \sum_i (\nu_1 - \nu_i) t_i\,\frac{\partial}{\partial t_i} + \sigma(\nu_n - \nu_1).
$$

Одночлены $c^k s_i^l\, t_j^m$ и $\widehat{c}^k s_i^l\, t_j^m$ являются собственными векторами для $X \in \mathfrak{a}$ с весами $(k+m-\sigma)e_1 + le_i - me_j - (k+l-\sigma)e_n$. Одночлен $c^p \widehat{c}^q$ является собственным вектором для $X \in \mathfrak{a}$ с весом $(p+q-\sigma)(e_1 - e_n)$.

Сопряженному пространству $\mathcal{D}'_{\sigma,\varepsilon}(G)$, отвечает некоторое пространство $\mathcal{D}'_{\varepsilon}(Z)$ обобщенных функций на Z. Оно содержится в пространстве $\mathcal{D}'(Z)$ обобщенных функций на Z и, в свою очередь, содержит пространство $\mathrm{Pol}\,(Z)$ многочленов на Z и пространство $\mathcal{D}'_0(Z)$ обобщенных функций на Z, сосредоточенных в единице группы Z, т.е. в точке $c = s = t = 0$. Пространство $\mathcal{D}'_0(Z)$ состоит из линейных комбинаций дельта-функции $\delta(z) = \delta(c)\,\delta(s_2)...\delta(s_{n-1})\,\delta(t_2)...\delta(t_{n-1})$, сосредоточенной в единице E группы Z, и ее частных производных по c, s_i, t_j (любого порядка).

Формулы (4.1)–(4.7) порождают представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в $\mathcal{D}'_{\sigma,\varepsilon}(Z)$. Эти представления не зависят от ε, поэтому мы будем иногда обозначать их T_σ. Пространство $\mathcal{D}'_0(Z)$ как модуль относительно представления T_σ алгебры $\mathrm{Env}\,(\mathfrak{g})$ порожден дельта-функцией $\delta(z)$.

Рассмотрим следующий оператор $B_{\sigma,\varepsilon}$, действующий в $\mathcal{D}_\varepsilon(Z)$:

$$
(B_{\sigma,\varepsilon} f)\,(z) = \int_Z K(z,\zeta)^{1-n-\sigma,\varepsilon}\, f(\zeta)\, d\zeta,
$$

где

$$
K(z,\zeta) = (c - sv + \widehat{a}\ )\,(\widehat{c} - ut + a)\,,
$$

матрицы z и ζ из Z имеют параметры c, s, t и a, u, v, соответственно. Интеграл абсолютно сходится при $\mathrm{Re}\,\sigma < 2-n$, он может быть продолжен аналитически по σ до мероморфной функции. Эта мероморфная функция имеет полюсы в тех же точках и с теми же кратностями, что и функция

$$\Gamma^2\left(\frac{2-n-\sigma+\varepsilon}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-n}{2}-\sigma\right).$$

Оператор $B_{\sigma,\varepsilon}$ сплетает представления $T_{\sigma,\varepsilon}$ и $T_{1-n-\sigma,\varepsilon}$:

$$T_{1-n-\sigma,\varepsilon}(g)B_{\sigma,\varepsilon} = B_{\sigma,\varepsilon}T_{\sigma,\varepsilon}(g).$$

Композиция $B_{1-n-\sigma,\varepsilon}\,B_{\sigma,\varepsilon}$ является скалярным оператором:

$$B_{1-n-\sigma,\varepsilon}\,B_{\sigma,\varepsilon} = \beta(\sigma,\varepsilon)\,E, \tag{4.8}$$

где

$$\begin{aligned}\beta(\sigma,\varepsilon) &= 2^{2n-3}\,\pi^{2n-5}\,\frac{\Gamma^2(\sigma+1)\,\Gamma^2(2-n-\sigma)}{2\sigma+n-1}\cdot\mathrm{tg}\left(\sigma+\frac{n}{2}\right)\pi\times\\ &\times\left[\cos\left(\sigma+\frac{n-1}{2}\right)\pi-\cos\left(\varepsilon+\frac{n-1}{2}\right)\pi\right]^2\end{aligned}$$

Если n четно, то $T_{\sigma,\varepsilon}$ неприводимо, за исключением целых $\sigma\,(\varepsilon=0,1)$. Если n нечетно, то $T_{\sigma,\varepsilon}$ неприводимо, за исключением следующих случаев: (а) $\sigma\in(1/2)+\mathbb{Z}$, $\varepsilon=0,1$; (б) $\sigma\in\mathbb{Z}$, $\sigma\geqslant 0$, $\sigma\equiv\varepsilon$; (с) $\sigma\in\mathbb{Z}$, $\sigma\leqslant 1-n$, $\sigma\equiv\varepsilon$.

Группа Вейля пары $(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ есть симметрическая группа S_n. Она переставляет диагональные элементы матрицы $X\in\mathfrak{a}$. Возьмем транспозицию $(1n)$ из S_n. В качестве представителя ее в K можно взять следующую матрицу:

$$w=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&J&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

где $J=\mathrm{diag}\,\{-1,1,...,1\}$. Отметим, что $w^2=E$, так что $w^{-1}=w$. Отображение $g\mapsto\overset{\circ}{g}=wgw$ есть автоморфизм (внутренний) группы G.

Обозначим через $\overset{\circ}{T}_{\sigma,\varepsilon}$ композицию этого автоморфизма и представления $T_{\sigma,\varepsilon}$:

$$\overset{\circ}{T}_{\sigma,\varepsilon}(g)=T_{\sigma,\varepsilon}(\overset{\circ}{g})=T_{\sigma,\varepsilon}(wgw).$$

Поскольку автоморфизм $g\mapsto\overset{\circ}{g}$ – внутренний, представления $T_{\sigma,\varepsilon}$ и $\overset{\circ}{T}_{\sigma,\varepsilon}$ эквивалентны, эквивалентность дается оператором

$$E_{\sigma,\varepsilon}=T_{\sigma,\varepsilon}(w),$$

т. е.

$$\overset{\circ}{T}_{\sigma,\varepsilon}(g)=E_{\sigma,\varepsilon}\,T_{\sigma,\varepsilon}(g)\,E_{\sigma,\varepsilon},$$

заметим, что $E_{\sigma,\varepsilon}^{-1} = E_{\sigma,\varepsilon}$. Этот оператор $E_{\sigma,\varepsilon}$ действует следующим образом:

$$(E_{\sigma,\varepsilon} f)\,(c,s,t) = f\left(\frac{1}{c},\ \frac{sJ}{c},\ \frac{Jt}{\widehat{c}}\right)(c\widehat{c})^{\sigma,\varepsilon}. \tag{4.9}$$

Заметим, что если $\widetilde{z} = z \cdot w$, то $\widehat{\widetilde{c}} = 1/\widehat{c}$. Обозначим через $\overset{\circ}{B}_{\sigma,\varepsilon}$ композицию операторов $E_{\sigma,\varepsilon}$ и $B_{\sigma,\varepsilon}$:

$$\overset{\circ}{B}_{\sigma,\varepsilon} = B_{\sigma,\varepsilon} E_{\sigma,\varepsilon} = E_{1-n-\sigma,\varepsilon}\, B_{\sigma,\varepsilon}. \tag{4.10}$$

Он имеет следующий вид:

$$\left(\overset{\circ}{B}_{\sigma,\varepsilon} f\right)(z) = \int_Z \overset{\circ}{K}(z,\zeta)^{1-n-\sigma,\varepsilon} f(\zeta)\, d\zeta, \tag{4.11}$$

где

$$\overset{\circ}{K}(z,\zeta) = \Big(1 - sJv + c\widehat{a}\Big)\Big(1 - uJt + \widehat{c}a\Big). \tag{4.12}$$

Оператор $\overset{\circ}{B}_{\sigma,\varepsilon}$ сплетает $T_{\sigma,\varepsilon}$ с $\overset{\circ}{T}_{1-n-\sigma,\varepsilon}$, а также $\overset{\circ}{T}_{\sigma,\varepsilon}$ с $T_{1-n-\sigma,\varepsilon}$. Для него справедливо точно такое же соотношение, что и (4.8) для $B_{\sigma,\varepsilon}$:

$$\overset{\circ}{B}_{1-n-\sigma,\varepsilon}\, \overset{\circ}{B}_{\sigma,\varepsilon} = \beta(\sigma,\varepsilon)\, E. \tag{4.13}$$

На языке ядер соотношение (4.13) выражается следующим образом:

$$\int_Z \overset{\circ}{K}(z,\zeta)^{1-n-\sigma,\varepsilon}\ \overset{\circ}{K}(\zeta,z_1)^{\sigma,\varepsilon}\, d\zeta = \beta(\sigma,\varepsilon)\, \delta_{z_1}(z), \tag{4.14}$$

где $\delta_{z_1}(z)$ обозначает дельта-функцию на Z, сосредоточенную в точке z_1. Полагая в (4.14) $z_1 = E$, получим

$$\int_Z \overset{\circ}{K}(z,\zeta)^{1-n-\sigma,\varepsilon}\, d\zeta = \beta(\sigma,\varepsilon)\, \delta(z). \tag{4.15}$$

Равенство (4.15) означает, что оператор $\overset{\circ}{B}_{\sigma,\varepsilon}$ переводит функцию 1 в дельта-функцию $\delta(z)$ с множителем:

$$\left(\overset{\circ}{B}_{\sigma,\varepsilon}\ 1\right)(z) = \beta(\sigma,\varepsilon)\, \delta(z). \tag{4.16}$$

Отсюда в силу сплетаемости, указанной выше, мы получаем для произвольного X из $\mathrm{Env}\,(\mathfrak{g})$:

$$\overset{\circ}{B}_{\sigma,\varepsilon}\ (T_{\sigma,\varepsilon}(X)\, 1)\,(z) = \beta(\sigma,\varepsilon)\ \left(\overset{\circ}{T}_{1-n-\sigma,\varepsilon}(X)\, \delta\right)(z), \tag{4.17}$$

$$\overset{\circ}{B}_{\sigma,\varepsilon}\ \left(\overset{\circ}{T}_{\sigma,\varepsilon}(X)\, 1\right)(z) = \beta(\sigma,\varepsilon)\ (T_{1-n-\sigma,\varepsilon}(X)\, \delta)\,(z).$$

Из (4.13) и (4.16) получаем соотношение (впрочем, вполне очевидное)

$$\overset{\circ}{B}_{1-n-\sigma,\varepsilon}\ \delta = 1$$

и, аналогично, из (4.13) и (4.17) получаем

$$\overset{\circ}{B}_{1-n-\sigma,\varepsilon} \left(\overset{\circ}{T}_{1-n-\sigma,\varepsilon}\ (X)\right) \delta = T_{\sigma,\varepsilon}(X)\, 1, \tag{4.18}$$

где $X \in \mathrm{Env}\,(\mathfrak{g})$.

Билинейная форма

$$(f,h) = \int_Z f(z)h(z)\, dz \tag{4.19}$$

инвариантна относительно пар $(T_{1-n-\sigma,\varepsilon},\, T_{\sigma,\varepsilon})$ и $(\overset{\circ}{T}_{1-n-\sigma,\varepsilon},\, \overset{\circ}{T}_{\sigma,\varepsilon})$.

§ 5. Представления T_m

В этом параграфе мы рассмотрим конечномерные представления группы G, связанные с представлениями $T_{\sigma,\varepsilon}$.

Пусть $m \in \mathbb{N}$. При $\varepsilon \equiv m$ в обозначении пространства, представления и оператора с индексами σ, ε нам будет удобнее вместо ε писать m.

Оператор $B_{m,m}$ имеет ненулевое ядро, которое мы обозначим через M_m. На нем оператор $B_{\sigma,m}$ имеет нуль первого порядка по σ. Подпредставление T_m представления $T_{m,m}$, действующее в M_m, неприводимо.

Обозначим через B_m производную по σ в точке $\sigma = m$ от ограничения $B_{\sigma,m}$ на M_m:

$$B_m = \frac{d}{d\sigma}\bigg|_{\sigma=m} \left(B_{\sigma,m}\bigg|_{M_m}\right). \tag{5.1}$$

Оператор B_m отображает M_m в $\mathcal{D}_{1-n-m,m}(Z)$ и дает эквивалентность представления T_m и фактор-представления $\widetilde{T}_{1-n-m}$ представления $T_{1-n-m,m}$, действующего в фактор-пространстве $\widetilde{\mathcal{D}}_{1-n-m}(Z)$ пространства $\mathcal{D}_{1-n-m,m}(Z)$ по образу оператора $B_{m,m}$. Композиция $B_{1-n-m,m}\, B_m$ есть скалярный оператор на M_m:

$$B_{1-n-m,m}\, B_m = \beta(m) \cdot E,$$

где

$$\beta(m) = \frac{d}{d\sigma}\bigg|_{\sigma=m,\varepsilon\equiv m} \beta(\sigma,\varepsilon) =$$

$$= (-1)^n\, 2^{2n-4\pm1}\, \pi^{2n-2}\, \frac{m!^2}{(2m+n-1)\,(m+n-2)!^2}\ , \tag{5.2}$$

знак + или − берется соответственно при четном или нечетном n.

Определим на M_m оператор $\overset{\circ}{B}_m$ аналогично (5.1):

$$\overset{\circ}{B}_m = \frac{\partial}{\partial\sigma}\bigg|_{\sigma=m} \overset{\circ}{B}_{\sigma,m}\ \ .$$

Он связан с B_m аналогично (4.10):

$$\overset{\circ}{B}_m = B_m E_m = E_{1-n-m,m} B_m,$$

где E_m – ограничение оператора $E_{m,m}$ на M_m. По (4.9) имеем

$$(E_m f)(c,\ s,\ t) = f\left(\frac{1}{c},\ \frac{sJ}{c},\ \frac{Jt}{\widehat{c}}\right)(c\widehat{c})^m. \tag{5.3}$$

Для оператора $\overset{\circ}{B}_m$ имеют место соотношения, аналогичные (4.16), (4.17) (они получаются из (4.16), (4.17) дифференцированием по σ):

$$\left(\overset{\circ}{B}_m\ 1\right)(z) = \beta(m)\,\delta(z), \tag{5.4}$$

$$\left(\overset{\circ}{B}_m\ (T_m(X)\,1)\right)(z) = \beta(m)\ \left(\overset{\circ}{T}_{1-n-m,m}\ (X)\delta\right)(z).$$

При $\sigma = 1-n-m$, $m \in \mathbb{N}$, модуль $\mathcal{D}_0'(Z)$ имеет единственный неприводимый фактор-модуль, содержащий класс смежности дельта-функции $\delta(z)$. Обозначим этот фактор-модуль через M_{1-n-m}. Представление алгебры $\mathrm{Env}\,(\mathfrak{g})$ в нем эквивалентно T_m. Оператор $\overset{\circ}{B}_m$: $M_m \to \mathcal{D}_0'(Z)$ порождает оператор $M_m \to M_{1-n-m}$, который мы снова обозначим $\overset{\circ}{B}_m$. Последний оператор сплетает представления алгебры $\mathrm{Env}\,(\mathfrak{g})$ в M_m и M_{1-n-m} и дает указанную выше эквивалентность этих представлений.

Теорема 5.1 *Пространство M_m есть некоторое пространство многочленов от c, s, t. Старший вес представления T_m есть $(m, 0, ..., 0, -m)$, размерность равна*

$$d(m,0,...,0,-m) = \frac{2m+n-1}{n-1}\binom{m+n-2}{m}^2.$$

Старший вектор есть многочлен $(c\widehat{c})^m$, младший вектор есть многочлен 1. Они получаются друг из друга с помощью оператора $E_m = T_m(w)$.

Доказательство. Функция 1 лежит в M_m. В самом деле, поскольку $\beta(\sigma, \varepsilon)$, см. (13.39), обращается в нуль при $\sigma = m$, $\varepsilon \equiv m$, равенство (4.16) показывает, что 1 лежит в ядре оператора $\overset{\circ}{B}_{m,\varepsilon}$.

Функция 1 является младшим вектором в M_m. В самом деле, как сразу видно из (4.3), (4.4), (4.6), (4.7), она обращается в нуль отрицательной корневой подалгеброй $\mathfrak{z}$, натянутой на E_{ij}, $i > j$. Ее вес $(-m, 0, ..., 0, m)$ есть младший вес представления T_m.

Все пространство M_m получается из младшего вектора – функции 1 – действием операторов $T_{m,\varepsilon}(X)$, $X \in \mathrm{Env}\,(\mathfrak{g})$, или многократным применением операторов $T_{m,\varepsilon}(X)$, $X \in \mathfrak{g}$. Как видно из (4.1) – (4.7), это пространство состоит из некоторых многочленов от c, s, t (от $c, s, t, \widehat{c}$).

Представление группы G, действующее в этом пространстве, есть конечномерное неприводимое представление со старшим весом $(m, 0, ..., 0, -m)$. Старший вектор получается из младшего вектора с помощью оператора E_m, см. (5.3). Формула (5.3) дает, что этот старший вектор есть $(c\widehat{c})^m$. Наконец, формула для размерности получается из (3.1). $\square$

Пространство M_m может быть охарактеризовано как множество решений индикаторной системы уравнений [2].

Обозначим через $\overset{\circ}{T}_m$ ограничение представления $\overset{\circ}{T}_{m,m}$ на M_m. Имеем

$$\overset{\circ}{T}_m\,(g) = E_m T_m(g) E_m.$$

Перепишем (4.18) для нашего случая:

$$\overset{\circ}{B}_{1-n-m,m}\,\overset{\circ}{T}_{1-n-m,m}\,(X)\,\delta = T_m(X)\,1,$$

где $X \in \mathrm{Env}(\mathfrak{g})$. Это равенство говорит, что M_m есть образ оператора $\overset{\circ}{B}_{1-n-m,\varepsilon}$, рассматриваемого на обобщенных функциях, сосредоточенных в нуле: $c = s = t = 0$, т.е. в единице группы Z. Пусть F – такая обобщенная функция. Тогда (4.11) дает

$$\int_Z \overset{\circ}{K}\,(z,\zeta)^m\,F(\zeta)\,d\zeta = f(z), \tag{5.5}$$

где $\overset{\circ}{K}$ дается формулой (4.12), f – многочлен из M_m. Поскольку $\overset{\circ}{K}\,(z,\zeta)^m$ есть многочлен от c, s, t, d, u, v, равенство (5.5) показывает, что этот многочлен $\overset{\circ}{K}$ $(z,\zeta)^m$ есть "производящая функция" для элементов из пространства M_m, т.е. M_m имеет базисом как раз те одночлены по c, s, t (или $\widehat{c}$), которые входят в $\overset{\circ}{K}$ $(z,\zeta)^m$. Например, при $m = 1$ базис состоит из $n^2{-}1$ многочленов 1, s_i, t_j, c, $\widehat{c}$, $\widehat{c}s_i$, ct_j, $c\widehat{c}$, здесь выписано n^2 многочленов, между ними есть одно соотношение: $c+\widehat{c}-st = 0$.

На пространстве M_m существует единственная с точностью до множителя билинейная форма, инвариантная относительно пары $(T_m,\,T_m)$ (и тем самым относительно пары $(\overset{\circ}{T}_m,\,\overset{\circ}{T}_m)$). Обозначим через L_m такую форму, нормированную условием:

$$L_m\,(1,\,(c\widehat{c})^m) = 1. \tag{5.6}$$

Введем еще форму

$$\overset{\circ}{L}_m\,(f,h) = L_m(E_m f,\,h) = L_m(f,\,E_m h).$$

Она инвариантна относительно пар $(\overset{\circ}{T}_m,\,T_m)$ и $(T_m,\,\overset{\circ}{T}_m)$. Условие нормировки (5.6) дает условие $\overset{\circ}{L}_m\,(1,\,1) = 1$. Формы L_m и $\overset{\circ}{L}_m$ только множителем (одним и тем же) отличаются соответственно от форм $(B_m f,\,h)$ и $(\overset{\circ}{B}_m\,f,\,h)$, см. (4.19). По (5.4) мы получаем $(\overset{\circ}{B}_m\,1,\,1) = \beta(m)$, так что

$$L_m(f,h) = \frac{1}{\beta(m)}\,(B_m f,\,h), \tag{5.7}$$

§ 6. Тензорное произведение $\pi_k^- \otimes \pi_k^+$

В этом параграфе мы рассматриваем тензорное произведение

$$R_k = \pi_k^- \otimes \pi_k^+.$$

Это представление группы G действует в пространстве W_k многочленов $f(\xi, \eta)$ от двух совокупностей переменных $\xi = (\xi_1, ..., \xi_{n-1})$, $\eta = (\eta_1, ..., \eta_{n-1})$ степени не выше k по каждой совокупности – по формуле:

$$(R_k(g)f)(\xi, \eta) = \left[(\xi\beta + \delta)(\eta\widehat{\beta} + \widehat{\delta})\right]^k f(\xi \cdot g,\ \eta \cdot \widehat{g}). \tag{6.1}$$

По (3.2) его размерность равна $[d(k, 0, ..., 0)]^2$.

Многочлен $N(\xi, \eta)$, см. (2.3), обладает следующим свойством

$$N(\xi \cdot g,\ \eta \cdot \widehat{g}) = N(\xi, \eta)\left[(\xi\beta + \delta)(\eta\widehat{\beta} + \widehat{\delta})\right]^{-1}.$$

Поэтому отображение $W_m \to W_k$, $0 \leqslant m \leqslant k$, состоящее в умножении на N^{k-m}, сплетает R_m с R_k.

Отсюда следует, что многочлен

$$\Phi_k = N^k = (1 - \langle \xi, \eta \rangle)^k \tag{6.2}$$

неподвижен относительно R_k:

$$R_k(g)\Phi_k = \Phi_k, \quad g \in G, \tag{6.3}$$

и что многочлены

$$u_{k,m} = N^{k-m}\,{\xi_1}^m \qquad v_{k,m} = N^{k-m}\,(-\eta_1)^m, \tag{6.4}$$

где $m = 0, 1, .., k$, являются соответственно старшими и младшими векторами в представлении R_k, т.е. обращаются в нуль положительной и отрицательной корневыми подалгебрами $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{z}$, соответственно.

Лемма 6.1 *Представление R_k распадается в прямую однократную сумму:*

$$R_k = T_0 + T_1 + ... + T_k. \tag{6.5}$$

Доказательство. Многочлены $N^{k-m}\,{\xi_1}^m$ и $N^{k-m}\,(-\eta_1)^m$ являются весовыми векторами с весами $(m, 0, ..., 0, -m)$ и $(-m, 0, ..., 0, m)$, соответственно. Это означает, что представление R_k содержит неприводимые представления T_m, $m = 0, 1, .., k$

(см. § 5). С другой стороны, размерность представления R_k в точности совпадает с суммой размерностей этих представлений:

$$d(k,0,...,0)\cdot d(0,...,0,-k) = [d(k,0,...,0)]^2 = \sum_{m=0}^{k} d(m,0,...,0,-m). \qquad (6.6)$$

В самом деле, из (3.2) легко выводим, что

$$[d(m,0,...,0)]^2 - [d(m-1,0,...,0)]^2 = d(m,0,...,0,-m).$$

Отсюда и получается (6.6) и, следовательно, (6.5). □

Соответственно (6.5) пространство W_k распадается в прямую сумму подпространств $W_{k,m}$, $m = 0,1,...k$.

Обозначим через $W^{(k)}$ инвариантное относительно R_k подпространство в W_k, порожденное младшим вектором $v_{k,k} = (-\eta_1)^k$. Его вес есть $(-k,\ 0,\ ...,\ 0,\ k)$. Такой вес встречается в R_k один раз. Следовательно, именно в $W^{(k)}$ действует представление T_k – со старшим весом $(k,\ 0,\ ...\ 0,\ -k)$. Старший вектор в $W^{(k)}$ есть ξ_1^k (так что $W^{(k)}$ можно было бы определить и как оболочку этого старшего вектора ξ_1^k).

Заметим, что $W^{(0)}$ есть одномерное пространство: $W^{(0)} = \mathbb{C}$. В силу леммы 16.2 подпространство в W_k, порожденное младшим вектором $N^{k-m}(-\eta_1)^m$, есть не что иное, как $N^{k-m}W^{(m)}$.

Итак, мы доказали теорему:

Теорема 6.2 *Представление R_k группы G распадается в прямую однократную сумму (6.5). Соответствующее разложение пространства W_k на неприводимые подпространства есть*

$$W_k = W_{k,0} + W_{k,1} + ... + W_{k,k}, \quad W_{k,m} = N^{k-m}W^{(m)}.$$

§ 7. H-инварианты

В этом параграфе мы находим векторы, инвариантные относительно подгруппы H, в пространствах некоторых представлений, рассмотренных нами ранее. Для бесконечномерных представлений эти H-инварианты оказываются, как правило, обобщенными функциями.

Сначала рассмотрим представления $T_{\sigma,\varepsilon}$.

Сразу предъявим H-инвариант $\theta_{\sigma,\varepsilon}$. В реализации на $\mathcal{Y}$ это – обобщенная функция

$$\theta_{\sigma,\varepsilon}(y) = \left\{\mathrm{tr}\,(x^0 y)\right\}^{\sigma,\varepsilon} = y_{nn}^{\sigma,\varepsilon},$$

где $y = g^{-1}y^0 g$, x^0 см. (2.1). В реализации на Z получаем

$$\theta_{\sigma,\varepsilon}(z) = \left\{\mathrm{tr}\ \left(x^0 y(z)\right)\right\}^{\sigma,\varepsilon} = \widehat{c}^{\,\sigma,\varepsilon}. \qquad (7.1)$$

Обобщенная функция $\theta_{\sigma,\varepsilon}(z)$ регулярна (является локально интегрируемой функцией) при $\mathrm{Re}\,\sigma > -1$, аналитически зависит от σ и может быть продолжена во всю комплексную плоскость σ до мероморфной функции – с полюсами второго порядка в точках $\sigma \in -1-\varepsilon-2\mathbb{N}$.

Следующие утверждения содержатся в [5].

Размерность пространства H-инвариантных векторов в $\mathcal{D}'_\varepsilon(\Gamma)$ относительно $T_{\sigma,\varepsilon}$ равна 1, за исключением случая $n=3$, $\sigma=-k-1$, $\varepsilon\equiv k+1$, $k\in\mathbb{N}$. В этом случае размерность равна 2. Базис для σ общего положения есть $\theta_{\sigma,\varepsilon}$.

Если представление $T_{\sigma,\varepsilon}$ приводимо, то в каждом неприводимом подфакторе имеется единственный с точностью до множителя H-инвариант.

Оператор $B_{\sigma,\varepsilon}$ переводит $\theta_{\sigma,\varepsilon}$ в $\theta_{1-n-\sigma,\varepsilon}$ с множителем:

$$B_{\sigma,\varepsilon}\,\theta_{\sigma,\varepsilon} = j(\sigma,\varepsilon)\,\theta_{1-n-\sigma,\varepsilon},$$

где

$$j(\sigma,\varepsilon) = (2\pi)^{n-2}\,\frac{(-1)^\varepsilon - \cos\sigma\pi}{\cos\left(\sigma+\frac{n}{2}\right)\pi}\cdot\frac{\Gamma^2(\sigma+1)}{\Gamma(2\sigma+n)}.$$

Нас сейчас интересуют случаи $\sigma=m$ и $\sigma=1-n-m$ при $m\in\mathbb{N}$, $m\equiv\varepsilon$. Мы специализирум предыдущие утверждения, используем формулу (7.1), определение $\overset{\circ}{T}_m$ и тот факт, что оператор E_m, см. (5.3), переводит $\widehat{c}^m$ в c^m. Мы получаем

Теорема 7.1 *Пространство H-инвариантов в пространстве M_m относительно представления T_m одномерно. В реализации на $\mathcal{Y}$ базисом служит многочлен $\theta_m(y)=\{\mathrm{tr}\,(x^0y)\}^m$, а в реализации на Z – многочлен*

$$\theta_m(z) = \left\{\mathrm{tr}\ \left(x^0 y(z)\right)\right\}^m = \widehat{c}^m.$$

Пространство H-инвариантов в M_m относительно представления $\overset{\circ}{T}_m$ одномерно. Базисом служит многочлен c^m.

Теперь найдем инварианты относительно $\mathrm{Env}\,(\mathfrak{h})$ в фактор-модуле M_{1-n-m}, см. § 5. Для $m=1,2,..$ определим следующий элемент из $\mathrm{Env}\,(\mathfrak{g})$:

$$X_m = (E_{1n}+Y)(2E_{1n}+Y)...(mE_{1n}+Y),$$

где

$$Y = E_{12}E_{2n}+E_{13}E_{3n}+...+E_{1,n-1}E_{n-1,n}.$$

Отметим, что E_{1n} и Y коммутируют.

Лемма 7.2 *Оператор $T_m(X_m)$ переводит 1 в c^m с множителем:*

$$T_m(X_m)\,1 = \lambda_m c^m, \tag{7.2}$$

где

$$\lambda_m = \frac{m!\,(2m+n-2)!}{(m+n-2)!}. \tag{7.3}$$

Доказательство. По формулам (4.1), (4.2), (4.5) (с m вместо σ) получаем для $r = 0, 1, .., m-1$:

$$\begin{aligned} T_m(E_{1n})\,c^r &= (m-r)\,c^{r+1} - mc^r\widehat{c}, \\ T_m(E_{1i}E_{in})\,c^r &= (m-r)\left(c^{r+1} + mc^r s_i t_i\right), \end{aligned}$$

так что

$$T_m(Y)\,c^r = (m-r)\,\left\{(m+n-2)c^{r+1} + mc^r\widehat{c}\,\right\},$$

следовательно,

$$T_m((m-r)E_{1n} + Y)\,c^r = (m-r)\,(2m+n-2)\,c^{r+1}.$$

Отсюда получаем (7.2), (7.3). $\square$

Теорема 7.3 *Фактор-модуль M_{1-n-m} имеет единственный с точностью до множителя элемент, инвариантный относительно алгебры* $\mathrm{Env}(\mathfrak{h})$. *Это – класс смежности обобщенной функции*

$$\zeta_{1-n-m} = D_m\delta, \tag{7.4}$$

где

$$D_m = \sum_{r=0}^{m} \frac{m!}{(m-r)!}\left(\frac{\partial}{\partial c}\right)^r \Delta_{st}^{m-r}, \qquad \Delta_{st} = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial s_i \partial t_i}. \tag{7.5}$$

Доказательство. Обозначим через $\overset{\circ}{X}_m$ следующий элемент из $\mathrm{Env}\,(\mathfrak{g})$:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{X}_m &= wX_mw = \mathrm{Ad}\,w \cdot X_m = && (19.21)\\ &= (E_{n1} + V)(2E_{n1} + V)\ \ldots\ (mE_{n1} + V), && (19.22) \end{aligned}$$

где

$$V = E_{n2}E_{21} + E_{n3}E_{31} + ... + E_{n,\,n-1}E_{n-1,\,1}.$$

Отметим, что E_{n1} и V коммутируют. По лемме 7.2 имеем

$$\overset{\circ}{B}_m\ (\lambda_m c^m) = (\overset{\circ}{B}_m\ (T_m(X_m)\,1) = \beta(m)\ \overset{\circ}{T}_{1-n-m,\varepsilon}\ (X_m)\,\delta.$$

Для всякого $X \in \mathrm{Env}(\mathfrak{g})$ мы имеем:

$$\overset{\circ}{T}_{\sigma,\varepsilon}\ (X) = T_{\sigma,\varepsilon}(wXw).$$

Поэтому из (7.6), (7.7) мы получаем

$$\overset{\circ}{B}_m\ (\lambda_m c^m) = \beta(m)\,T_{1-n-m,\varepsilon}(\overset{\circ}{X}_m)\,\delta. \tag{7.8}$$

Обозначим

$$\zeta_{1-n-m} = T_{1-n-m,\varepsilon}(\overset{\circ}{X}_m)\,\delta. \tag{7.9}$$

Из (7.8) следует, что класс смежности этой обобщенной функции ζ_{1-n-m} инвариантен относительно $\mathrm{Env}\,(\mathfrak{h})$. Теперь нужно показать, что ζ_{1-n-m} имеет явное выражение (7.4), (7.5). Докажем это индукцией по m. Как видно из формул (4.4), (4.6), (4.7), операторы $T_{\sigma,\varepsilon}(E_{ni})$, $T_{\sigma,\varepsilon}(E_{i1})$, и, стало быть, операторы $T_{\sigma,\varepsilon}(V)$ не зависят от σ, ε. Поэтому мы будем опускать индексы $1-n-m$, ε в обозначении операторов $T_{1-n-m,\,\varepsilon}(E_{ni})$ и т.д. и писать $T(E_{ni})$ и т.д.

По (4.4), (4.7) имеем

$$T(V) = (n-2)\frac{\partial}{\partial c} + \frac{\partial}{\partial c}S + \Delta_{st}, \tag{7.10}$$

где

$$S = \sum_{i=2}^{n-1} s_i\,\frac{\partial}{\partial s_i}.$$

Для дельта-функции Дирака $\delta(x)$ на прямой справедливо следующее соотношение:

$$x^r\delta^{(k)}(x) = (-1)^r\,\frac{k!}{(k-r)!}\,\delta^{(k-r)}(x), \tag{7.11}$$

где $\delta^{(p)}(x)$ обозначает p-ую производную от $\delta(x)$.

Применяя это сотношение, получаем для нашей дельта-функции δ на Z, сосредоточенной в единице, следующую формулу:

$$S\delta = -(n-2)\delta,$$

так что по (7.10) имеем

$$T(V)\,\delta = \Delta_{st}\,\delta,$$

и по (4.6)

$$T(\overset{\circ}{X}_1) = T(E_{n1}+V) = \left(\frac{\partial}{\partial c} + \Delta_{st}\right)\,\delta.$$

Это доказывает справедливость (7.4) для $m=1$ (начало индукции).

Для проведения индукционного шага надо будет вычислить, как действуют операторы S и $T(V)$ на $\Delta_{st}^k\delta$.

Найдем $S\Delta_{st}^k\delta$. В силу (7.11) нам надо сначала вычислить

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\,x_i f, \tag{7.12}$$

где $f = \left(\sum x_j\,a_j\right)^k$, затем заменить x_i на $\partial/\partial s_i$ и a_j на $\partial/\partial t_j$, применить это к δ и умножить все это на (-1). Выражение (7.12) равно

$$(n-2)f + \sum x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\,f. \tag{7.13}$$

Но f – однородный многочлен от x_i степени k, поэтому (7.13) равно $(n-2+k)\,f$. Следовательно,

$$S\,\Delta_{st}^k\,\delta = -(n-2+k)\,\Delta_{st}^k\,\delta$$

и, по (7.10),

$$T(V)\,\Delta_{st}^k\,\delta=\left(-k\,\frac{\partial}{\partial c}+\Delta_{st}\right)\,\Delta_{st}^k\,\delta.$$

Пусть теперь равенство (7.4) выполняется для m. Покажем, что тогда оно выполняется для $m+1$. Имеем (напомним, что E_{n1} и V коммутируют):

$$\begin{aligned}
T\left(\overset{\circ}{X}_{m+1}\right)\delta &= \left[(m+1)\,\frac{\partial}{\partial c}+T(V)\right]\,T\left(\overset{\circ}{X}_m\right)\,\delta= \\
&= \sum_{r=0}^{m}(m+1)\,\frac{m!}{(m-r)!}\left(\frac{\partial}{\partial c}\right)^{r+1}\,\Delta_{st}^{m-r}\,\delta+ \\
&+ \sum_{r=0}^{m}\frac{m!}{(m-r)!}\left(\frac{\partial}{\partial c}\right)^{r}\left[-(m-r)\frac{\partial}{\partial c}+\Delta_{st}\right]\,\Delta_{st}^{m-r}\,\delta.
\end{aligned}$$

Коэффициент в правой части при $(\partial/\partial c)^k\,\Delta_{st}^{m+1-k}\,\delta$ равен $m!/(m+1-k)!$, что и завершает доказательство теоремы. $\square$

Отметим, что, как следует из (7.8), (7.9) и (7.3), (5.2), оператор $\overset{\circ}{B}_m$ переводит c^m в ζ_{1-n-m} с множителем:

$$\overset{\circ}{B}_m\,(c^m)=\mu_m\,\zeta_{1-n-m},$$

где

$$\mu_m=\frac{\beta(m)}{\lambda_m}=(-1)^n2^{2n-4\pm1}\,\pi^{2n-2}\,\frac{m!}{(2m+n-1)!\,(m+n-2)!},$$

знак + или – берется соответственно при четном или нечетном n.

§ 8. Квазирегулярное представление в многочленах на G/H

Обозначим через $S_m(\mathcal{X})$ пространство ограничений на $\mathcal{X}$ многочленов от матричных элементов x_{ij} матриц x из $\mathrm{Mat}\,(n,\mathbb{R})$, однородных степени m, $k\in\mathbb{N}$. Обозначим

$$\mathcal{M}_k(\mathcal{X})=S_0(\mathcal{X})+S_1(\mathcal{X})+\ldots+S_k(\mathcal{X}).$$

Это – пространство ограничений на $\mathcal{X}$ всех многочленов степени $\leqslant k$. Действие U группы G в функциях на $\mathcal{X}$, определенное (2.4), сохраняет все эти пространства. Пространства $S_m(\mathcal{X})$ неприводимы, в каждом из них есть H-инвариантный вектор, единственный с точностью до множителя. Следовательно, пространство H-инвариантных векторов в $\mathcal{M}_k(\mathcal{X})$ имеет размерность $k+1$.

Это доказывается переходом сначала к комплексификации пространства $\mathcal{X}$, а затем к его компактной форме $\mathrm{SU}(n)/\mathrm{U}(n-1)$.

Вспомним пространство W_k из § 6. Разделим все многочлены f из W_k на многочлен Φ_k, см. (6.2), т.е. рассмотрим отображение σ_k пространства W_k:

$$(\sigma_k f)(x)=\frac{f(\xi,\eta)}{\Phi_k(\xi,\eta)}$$

в пространство функций на $\mathcal{X}$ (ξ, η – орисферические координаты точки x).

Теорема 8.1 *Отображение σ_k есть изоморфизм пространства W_k на пространство $\mathcal{M}_k(\mathcal{X})$, сплетающий представления R_k и U группы G. При этом каждое подпространство $W_{k,m}$ отображается на $S_m(\mathcal{X})$, $m = 0, 1, ..., k$.*

Доказательство. Пусть x имеет кординаты ξ, η, тогда $g^{-1}xg$ имеет координаты $\widetilde{\xi}, \widehat{\eta}$ (см. § 2). Поэтому, используя (6.1) и (6.3), получаем для $F = f/\Phi_k$:

$$F(g^{-1}xg) = \frac{f(\widetilde{\xi}, \widehat{\eta})}{\Phi_k(\widetilde{\xi}, \widehat{\eta})} = \frac{(R_k(g)f)\,(\xi, \eta)}{(R_k(g)\Phi_k)\,(\xi, \eta)} = \frac{(R_k(g)f)\,(\xi, \eta)}{\Phi_k(\xi, \eta)},$$

что и означает, что σ_k сплетает R_k и U.

Возьмем в $W_{k,m}$ младший вектор $v_{k,m}$, см. (6.4). Отображение σ_k переводит его в функцию $(-\eta_1/N)^m$, а это есть не что иное, как многочлен x_{1n}^m из $S_m(\mathcal{X})$. В силу G-инвариантности каждое $W_{k,m}$, $m = 0, 1, .., k$, вкладывается в $S_m(\mathcal{X})$. Так что все W_k вкладывается в $\mathcal{M}_k(\mathcal{X})$.

Поскольку $R_k = T_0 + T_1 + ... + T_k$ и каждое T_m имеет одномерное пространство H-инвариантов (теорема 7.1), размерность пространства H-инвариантов в W_k равна $k + 1$. Она совпадает с размерностью пространства H-инвариантов в $\mathcal{M}_k(\mathcal{X})$. Следовательно, отображение σ_k является биекцией W_k на $\mathcal{M}_k(\mathcal{X})$. $\square$

§ 9. Преобразование Пуассона

Возьмем H-инвариант θ_m в пространстве M_m из теоремы 7.1 в реализации на $\mathcal{Y}$. Согласно [4] он порождает ядро Пуассона

$$P_m(x, y) = \left(T_m(g^{-1})\theta_m\right)(y) = \theta_m(gyg^{-1}),$$

где $x = g^{-1}x^0 g$, $y \in \mathcal{Y}$. Подставляя выражение для $\theta_m(y)$ из теоремы 7.1, получаем

$$P_m(x, y) = \{\mathrm{tr}\,(xy)\}^m. \tag{9.1}$$

Нам потребуется это ядро со специализацией $y = y(z) = z^{-1}y^0 z$, $z \in Z$, в этом случае обозначим его $P_m(x, z)$.

Лемма 9.1 *Пусть $x \in \mathcal{X}$ имеет орисферические координаты ξ, η, а матрица $z \in Z$ имеет параметры c, s, t, пусть $\widehat{c} = st - c$. Тогда ядро Пуассона выражается следующим образом:*

$$P_m(x, z) = \left[\frac{(-c\eta_1 - \sum s_i\eta_i + 1)\,(\xi_1 - \sum t_i\xi_i + \widehat{c})}{N(\xi, \eta)}\right]^m. \tag{9.2}$$

Доказательство. Матрицы x и $y(z)$ можно записать в виде произведения столбца на строку:

$$x = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} -\eta_1 \\ \vdots \\ -\eta_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix} (\xi_1 \ldots \xi_{n-1}\, 1), \quad y(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ -t_2 \\ \vdots \\ -t_{n-1} \\ \widehat{c} \end{pmatrix} (c\, s_2 \ldots s_{n-1}\, 1).$$

Теперь (9.2) получается из (9.1) с $y = y(z)$. $\square$

При фиксированном $x \in \mathcal{X}$ ядро Пуассона $P_m(x,z)$ есть многочлен из M_m, а при фиксированном $z \in Z$ оно есть многочлен из $S_m(\mathcal{X})$.

Преобразованием Пуассона назовем следующий оператор из M_m в $S_m(\mathcal{X})$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_m f)(x) &= L_m(P_m(x,\cdot),\, f) = \\ &= L_m\left(T_m(g^{-1})\theta_m,\, f\right) = \\ &= L_m(\theta_m,\, T_m(g)f), \end{aligned} \tag{9.3}$$

где $x = g^{-1}x^0g$, L_m – форма из § 5. В силу инвариантности формы L_m этот оператор сплетает T_m и U:

$$\mathcal{P}_m T_m(g) = U(g)\mathcal{P}_m.$$

Теорема 9.2 *Преобразование Пуассона $\mathcal{P}_m$ изоморфно отображает пространство M_m на пространство $S_m(\mathcal{X})$.*

В самом деле, младший вектор $1 \in M_m$ под действием $\mathcal{P}_m$ переходит в коэффициент при $(c\widehat{c})^m$ в (9.2), т.е. в $(-\eta_1/N)^m = x_{1n}^m$. Аналогично, старший вектор $(c\widehat{c})^m \in M_m$ переходит в свободный член (относительно параметров c, s, t) в (9.2), т.е. в $(\xi_1/N)^m = x_{n1}^m$. $\square$

Запишем преобразование Пуассона $\mathcal{P}_m$ в *дифференциальной* форме. Пусть D_m^* – оператор, сопряженный к оператору D_m, см. (7.5), т.е.

$$D_m^* = \sum_{r=o}^{m} \frac{m!}{(m-r)!} (-1)^r \left(\frac{\partial}{\partial c}\right)^r \Delta_{st}.$$

Теорема 9.3 *Преобразование Пуассона $\mathcal{P}_m$ выражается следующей дифференциальной формулой:*

$$(\mathcal{P}_m f)(x) = \frac{1}{\lambda_m} D_m^* T_m(g) f(z)\bigg|_{z=E}, \tag{9.4}$$

где $x = g^{-1}x^0g$, матрица z имеет параметры c, s, t, коэффициент λ_m дается формулой (7.3).

Доказательство. Перепишем (9.3) с помощью (5.7):

$$(\mathcal{P}_m f)(x) = \frac{1}{\beta(m)}\,(B_m\theta_m,\ T_m(g)f), \tag{9.5}$$

где, напомним, $\theta_m = \widehat{c}^{\,m}$. Так как $\widehat{c}^{\,m} = E_m c^m$, то по (7.8) и (7.9) мы имеем

$$B_m\theta_m = B_m E_m c^m = \overset{\circ}{B}_m c^m = \frac{\beta(m)}{\lambda_m}\,\zeta_{1-n-m}, \tag{9.6}$$

где ζ_{1-n-m} дается формулами (7.4), (7.5). Подставляя (9.6) в (9.5), получаем

$$(\mathcal{P}_m f)(x) = \frac{1}{\lambda_m}\Big(\zeta_{1-n-m},\, T_m(g)f\Big),$$

что и есть (9.4). $\square$

Литература

1. Н. Б. Волотова. Преобразование Пуассона для пространства $\mathrm{SL}\,(n,\mathbb{R})/\mathrm{GL}\,(n-1,\mathbb{R})$: дифференциальная формула. Державинские чтения V: Материалы научн. конф. Тамбов: изд-во ТГУ, 2000, 10–11.

2. Н. Б. Волотова. Индикаторные системы для представлений вырожденных серий линейной группы. Вестник Тамбовского унив. Сер. Естеств. и техн. науки, 2007, том 12, вып. 4, 430–432.

3. Д. П. Желобенко. Компактные группы Ли и их представления. М.: Физматгиз, 1970.

4. В. Ф. Молчанов. Гармонический анализ на однородных пространствах. Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. матем. Фундам. напр. / ВИНИТИ. 1990, том 59, 5–144.

5. G. van Dijk, V. F. Molchanov. The Berezin form for rank one para-Hermitian symmetric spaces, J. Math. Pures Appl., 1998, t. 77, No. 8, 747–799.

6. G. van Dijk, V. F. Molchanov. Tensor products of maximal degenerate series representations of the group $\mathrm{SL}\,(n,\mathbb{R})$. J. Math. Pures Appl., 1999, t. 78, No. 1, 99–119.

7. V. F. Molchanov, N. B. Volotova. Finite dimensional analysis and polynomial quantization on a hyperboloid of one sheet. Вестник Тамбовского унив., Сер. Естеств. и техн. науки, 1998, том 3, вып. 1, 65–78.